Die
Raumcurve IV. Ordnung II. Species
synthetisch behandelt.

Inaugural-Dissertation

der

mathematischen und naturwissenschaftlichen Facultät

der

Kaiser-Wilhelms-Universität Strassburg

zur Erlangung der Doctorwürde

vorgelegt von

Stanislaus Jolles

aus **Berlin.**

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

DRESDEN
Buchdruckerei von Carl Engelmann
1883.

Auf die Raumcurve *IV.* Ordnung *II.* Species hat zuerst **Salmon** 1850 aufmerksam gemacht in seiner Abhandlung **„On the classification of curves of double curvature“.** [1]) Er definirt sie a. a. O. als partiellen Schnitt einer Fläche *II.* Ordnung und einer Fläche *III.* Ordnung, welche zwei windschiefe Gerade gemeinsam haben und stellt die sie characterisirenden Zahlen auf. 1861 giebt **Cremona** in seiner Abhandlung **„Intorno alla curva gobba del quart'ordine per la quale passa una sola superficie di secondo grado“** [2]) eine ausführliche Theorie dieser Curve und 1862 beweist **Cayley** [3]), dass durch acht Punkte im Allgemeinen vier Raumcurven *IV.* Ordnung *II.* Species hindurchgelegt werden können.

Alle diese Arbeiten gehören der analytischen Geometrie an; in der vorliegenden Arbeit dagegen sind die Untersuchungen mit synthetischen Hilfsmitteln geführt. Die Curve wird zunächst als Erzeugniss einer Regelschaar *II.* Ordnung und eines zu ihr projectiven Ebenenbüschels *II.* Ordnung betrachtet. Später wird bewiesen **(II)**, dass sie auch als partieller Schnitt einer Regelfläche *II.* Ordnung und einer Regelfläche *III.* Ordnung angesehen werden kann, welche zwei windschiefe Gerade mit einander gemein haben. Letztere Erzeugungsart führt ohne Weiteres zu einer bisher noch nicht benutzten Abbildung des Sehnensystemes der Curve auf das Strahlensystem und des Axensystemes des Büschels ihrer doppelt berührenden Ebenen auf das Punktsystem einer Ebene. Diese Abbildung erweist sich als sehr fruchtbar für die Theorie der Raumcurve *IV.* Ordnung *II.* Species.

Strassburg, den 26. Juli 1882.

---

1) Cambridge and Dublin Math. Journal, vol. V, pag. 23.

2) Annali di Matematica, Serie II, T. IV, pag. 71.

3) A treatise on the analytic geometry of three dimensions by G. Salmon 1862 pag. 256.

I.

Die projective Erzeugung der Raumcurve IV. Ordnung II. Species und die Construction ihres Sehnensystemes.

1. Eine Regelschaar *II.* Ordnung $\mathbf{R}^2$ und ein zu ihr projectiver Ebenenbüschel *II.* Ordnung werden von einer Ebene im Allgemeinen in einer Punktreihe *II.* Ordnung und einem zu ihr projectiven Strahlenbüschel *II.* Ordnung geschnitten. Von letzterem gehen höchstens vier Strahlen durch die entsprechenden Punkte der Punktreihe [1]), folglich ist das Erzeugniss einer Regelschaar *II.* Ordnung und eines zu ihr projectiven Ebenenbüschels *II.* Ordnung im Allgemeinen eine Raumcurve *IV.* Ordnung.

Auf jedem Leitstrahle bestimmt die Regelschaar $\mathbf{R}^2$ eine zum gegebenen Ebenenbüschel *II.* Ordnung projective Punktreihe *I.* Ordnung. Von dieser sind entweder drei reelle oder ein reeller und zwei conjugirt imaginäre Punkte [2]) auf den homologen Ebenen des Ebenenbüschels *II.* Ordnung enthalten. Jeder Leitstrahl der Regelschaar $\mathbf{R}^2$ erweist sich sonach als eine Doppelsehne der erzeugten Curve, durch letztere kann also ausser der Fläche *II.* Ordnung, auf welcher die Regelschaar $\mathbf{R}^2$ gelegen ist, keine weitere Fläche *II.* Ordnung hindurchgelegt werden.

Die von einem Ebenenbüschel *II.* Ordnung und einer zu ihm projectiven Regelschaar *II.* Ordnung erzeugte Raumcurve *IV.* Ordnung heisst von der zweiten Species $(\mathbf{C}_{2,4})$. Von der Raumcurve *IV.* Ordnung *I.* Species, durch welche ein Büschel von Flächen *II.* Ordnung hindurchgeht, unterscheidet sie sich wesentlich dadurch, dass sie Doppelsehnen besitzt und durch sie nur eine Fläche *II.* Ordnung hindurchgeht. Diese Fläche *II.* Ordnung werde im Folgenden durch $\mathfrak{F}^2$ bezeichnet.

---

1) v. Staudt, B. z. G. d. L. pag. 13.
2) v. Staudt, B. z. G. d. L. pag. 7.

Ein Ebenenbüschel *II.* Ordnung und eine zu ihm projective Regelschaar R_2 erzeugen also im Allgemeinen eine Raumcurve *IV.* Ordnung zweiter Species ($C_{2,4}$). Jeder Leitstrahl der Regelschaar R^2 von $\mathfrak{F}^2$ ist eine Doppelsehne der $C_{2,4}$ und umgekehrt jede Doppelsehne der $C_{2,4}$ ein Leitstrahl von R^2. Je nachdem die Doppelsehnen die $C_{2,4}$ in drei reellen Punkten oder in einem reellen Punkte schneiden, werden sie eigentliche oder uneigentliche Doppelsehnen der $C_{2,4}$ genannt.

2. Die $C_{2,4}$ zerfällt in eine Raumcurve *III.* Ordnung und eine sie in einem Punkte schneidende Gerade, wenn ein Strahl $\mathfrak{e}$ der Regelschaar R^2 in der entsprechenden Ebene $\mathfrak{e}$ des Ebenenbüschels *II.* Ordnung liegt.

Aus dem in $\mathfrak{e}$ gelegenen Leitstrahle $\mathfrak{l}$ der Regelschaar R^2 wird nämlich diese durch einen zu ihr perspectiven also zum Ebenenbüschel *II.* Ordnung projectiven Ebenenbüschel *I.* Ordnung projicirt, der mit dem Ebenenbüschel *II.* Ordnung die Ebene $\mathfrak{e}$ entsprechend gemein hat und folglich mit ihm eine zu beiden perspective Regelschaar *II.* Ordnung erzeugt [1]). Die gesuchte Curve besteht also im vorliegenden Falle im Allgemeinen aus dem Regelstrahle $\mathfrak{e}$ und dem Schnitte zweier Flächen *II.* Ordnung mit der gemeinsam Erzeugenden $\mathfrak{l}$ d. h. aus einer Raumcurve *III.* Ordnung und einer sie in einem einzigen Punkte schneidenden Geraden.

In eine Punktreihe *II.* Ordnung und zwei Gerade zerfällt die $C_{2,4}$, wenn zwei Ebenen des Ebenenbüschels *II.* Ordnung die homologen Strahlen der Regelschaar R^2 enthalten. [2])

In den folgenden Untersuchungen wird von allen Ausartungen der $C_{2,4}$ abgesehen.

3. Das Erzeugniss eines Ebenenbüschels *I.* Ordnung und eines zu ihm projectiven Ebenenbüschels *II.* Ordnung ist im Allgemeinen eine Regelfläche *III.* Ordnung, deren Doppellinie die Axe des ersteren Ebenenbüschels ist [3]). Der gegebene Ebenenbüschel *II.* Ordnung erzeugt folglich mit jedem zur Regelschaar R^2 perspectiven Ebenenbüschel *I.* Ordnung eine durch die $C_{2,4}$ gehende Regelfläche *III.* Ordnung F^3, welche einen Leitstrahl von R^2 zur Doppellinie hat. Die einfache Leitlinie dieser Fläche ist eine Sehne der Curve, denn sie hat mit der Regelschaar R^2 ein Paar reeller oder conjugirt imaginärer Punkte gemein. Also:

Durch die $C_{2,4}$ gehen unendlich viele Regelflächen *III.* Ordnung F^3, welche je eine Doppelsehne derselben zur Doppellinie haben. Die einfachen Leitlinien dieser

---

[1]) v. Staudt, B. z. G. d. L. pag. 11.

[2]) v. Staudt, B. z. G. d. L. pag. 14.

[3]) Ein für allemal sei bemerkt, dass die in dieser Arbeit beuutzten Sätze über Regelflächen III. Ordnung synthetisch in **Reye's Geometrie der Lage** II. Aufl. I. Abth. pag. 179, 180 und 181 bewiesen sind, wenn nicht ausdrücklich andere Untersuchungen genannt werden.

Flächen sind Sehnen der Curve. Jede $C_{2,4}$ kann als partieller Schnitt einer Regelfläche *II.* Ordnung mit einer Regelfläche *III.* Ordnung betrachtet werden, deren Doppellinie auf ersterer gelegen ist.

Alle zu den Regelschaaren der genannten Flächen F^3 perspectiven Ebenenbüschel *II.* Ordnung sind, wie ohne Weiteres einleuchtet, projectiv zum gegebenen Ebenenbüschel *II.* Ordnung und können an seiner Stelle bei der Erzeugung der $C_{2,4}$ verwendet werden. **Der Mittelpunkt des gegebenen Ebenenbüschels *II.* Ordnung ist demnach keineswegs ein ausgezeichneter Punkt bezüglich der $C_{2,4}$.**

4. Aus einem Punkte **P** der $C_{2,4}$ projicirt im Allgemeinen ein Ebenenbüschel *II.* Ordnung $\mathfrak{p}$ die Regelschaar irgend einer in **(3)** gefundenen Regelfläche *III.* Ordnung F^3. Der Ebenenbüschel $\mathfrak{p}$ ist projectiv auf jeden Ebenenbüschel *I.* Ordnung bezogen, der die $C_{2,4}$ aus irgend einer ihrer Doppelsehnen projicirt und erzeugt folglich mit demjenigen Ebenenbüschel, dessen Axe die durch **P** gehende Doppelsehne **p** der $C_{2,4}$ ist, einen Kegel *III.* Ordnung mit dem Doppelstrahle **p** [1]).

Die $C_{2,4}$ wird somit aus einem auf ihr gelegenen Punkte P durch einen Kegel *III.* Ordnung mit einem Doppelstrahle projicirt. Der Dopelstrahl ist die durch den Punkt P gehende Doppelsehne der Curve.

Ein Kegel *III.* Ordnung mit einem Doppelstrahle hat drei in einer Ebene gelegene Inflexionsstrahlen [2]). Hieraus folgt:

In einem Punkte der $C_{2,4}$ schneiden sich vier Schmiegungsebenen, ihre Schmiegungspunkte liegen in einer Ebene.

5. Zwei $C_{2,4}$ mögen auf einer Regelfläche *II.* Ordnung verlaufen und sich in einem Punkte **P** schneiden. Haben dann beide Curven die nämlichen Doppelsehnen, so werden sie aus dem Punkte **P** durch zwei Kegel *III.* Ordnung **(4)** mit gleichem Doppelstrahle projicirt, und diese haben ausserdem noch höchstens fünf gemeinsame Erzeugende (Anmerkung I im Anhang). Haben hingegen beide Curven verschiedene Doppelsehnen, so werden sie aus dem Punkte **P** durch Kegel *III.* Ordnung mit verschiedenen Doppelstrahlen projicirt und diese haben höchstens neun gemeinsame Erzeugende. Also:

Zwei auf einer Regelfläche *II.* Ordnung verlaufende $C_{2,4}$ haben höchstens sechs gemeinsame Punkte, wenn sie die gleiche Regelschaar, höchstens zehn gemeinsame Punkte, wenn sie verschiedene Regelschaaren von Doppelsehnen haben.

Analog ergiebt sich der folgende Satz:

Liegen eine $C_{2,4}$ und eine Raumcurve *III.* Ordnung auf einer Regelfläche *II.* Ordnung, so haben sie höchstens fünf gemeinsame Punkte, wenn sie die Strahlen der nämlichen Regelschaar, höchstens sieben gemeinsame Punkte, wenn sie die Strahlen verschiedener Regelschaaren der Fläche *II.* Ordnung in je einem Punkte treffen.

---

1) Schröter, Crelle B. 54, pag. 38.

2) B. Klein, Ueber d. grdl. Fl. III. Ordg. pag. 52.

6. Fünf Strahlen **a** mögen eine Doppelsehne **d**, eine zu ihr windschiefe Sehne **s** und die $C_{2,4}$ selbst in je einem Punkte treffen. Werden dann **d** zur Doppellinie, **s** zur einfachen Leitlinie und die fünf Strahlen **a** zu Regelstrahlen einer Fläche *III.* Ordnung F^3 gewählt, so ist diese hierdurch im Allgemeinen völlig bestimmt (Anmerkung II im Anhang). Die Fläche F^3 durchdringt nun die Fläche $\mathfrak{F}^2$ in einer neuen $C_{2,4}$. Diese und die gegebene $C_{2,4}$ haben gleiche Doppelsehnen und schneiden sich in sieben Punkten. Nach **(5)** müssen hiernach beide Curven zusammenfallen. In anderen Worten:

Gleitet eine Gerade an einer Doppelsehne d, an einer zu ihr windschiefen Sehne s der $C_{2,4}$ und an der $C_{2,4}$ selbst dahin, so beschreibt sie eine Regelfläche *III.* Ordnung mit der Doppellinie d und der einfachen Leitlinie s.

7. Eine Gerade **g** verbinde einen beliebigen Punkt **P** des Raumes mit einem beliebigen Punkte **Q** der $C_{2,4}$ und schneide die Fläche $\mathfrak{F}^2$ ausser in **Q** noch in einem Punkte **R**, welcher aber nicht auf der $C_{2,4}$ selbst gelegen sein mag. Unendlich viele Sehnen der $C_{2,4}$ treffen nun die Gerade **g**, ohne durch die Punkte **P**, **Q** und **R** zu gehen. Jede derselben bestimmt mit der Curve und ihrer durch **R** laufenden Doppelsehne eine Regelfläche *III.* Ordnung **(6)**, deren Regelschaar aus **P** nothwendig durch einen Ebenenbüschel *II.* Ordnung projicirt wird. Alle diese Ebenenbüschel *II.* Ordnung sind zum nämlichen Ebenenbüschel *I.* Ordnung, also auch zu einander projectiv und erzeugen einen durch die $C_{2,4}$ gehenden Kegel *IV.* Ordnung mit drei Doppelstrahlen [1]). Letztere sind die durch den Punkt **P** gehenden Sehnen der Curve. Somit ist gezeigt:

Aus einem beliebigen Punkte P des Raumes wird die $C_{2,4}$ im Allgemeinen durch einen Kegel *IV.* Ordnung mit drei Doppelstrahlen projicirt, letztere sind die durch P gehenden Sehnen der Curve. Die $C_{2,4}$ hat von einem beliebigen Punkte aus gesehen drei scheinbare Doppelpunkte.

8. Um die projective Erzeugung desjenigen Kegels zu erhalten, welcher die $C_{2,4}$ aus einem beliebigen Punkte der Fläche $\mathfrak{F}^2$ projicirt, möge hier eine kurze Untersuchung über projective Beziehungen einiger Gebilde *III.* Ordnung eingeschaltet werden.

Vier Strahlen eines Strahlenbüschels *III.* Ordnung mit einem Doppelstrahle sollen vier harmonische Strahlen genannt werden, wenn sie den Doppelstrahl in vier harmonischen Punkten schneiden.

Nach der allgemeinen Definition der projectiven Verwandtschaft kann nunmehr der Strahlenbüschel *III.* Ordnung mit einem Doppelstrahle projectiv auf irgend welche Elementargebilde bezogen werden. Es gilt z. B. der Satz:

---

[1]) Schröter, Crelle B. 54, pag. 46.

Sind ein Strahlenbüschel *III.* Ordnung mit einem Doppelstrahle d und eine Punktreihe *I.* Ordnung g projectiv auf einander bezogen, so gehen höchstens vier Strahlen des Strahlenbüschels durch die entsprechenden Punkte der Punktreihe.

Die beiden projectiven Punktreihen **d** und **g** erzeugen nämlich einen Strahlenbüschel *II.* Ordnung, welcher mit dem Strahlenbüschel *III.* Ordnung den Strahl **d** und also höchstens noch vier Strahlen (Anmerkung I im Anhang) gemein hat.

Wird berücksichtigt, dass eine beliebige Gerade, welche mit einem Strahlenbüschel *I.* Ordnung in einer Ebene liegt, diesen in einer zu ihm projectiven Punktreihe schneidet, so ergiebt sich aus dem vorhergehenden Resultate leicht:

Ein Strahlenbüschel *III.* Ordnung mit einem Doppelstrahle und ein zu ihm projectiver Strahlenbüschel *I.* Ordnung A, die in derselben Ebene liegen, erzeugen im Allgemeinen eine Punktreihe *IV.* Ordnung mit dem dreifachen Punkte A.

Ein Ebenenbüschel *III.* Ordnung mit einer Doppelebene und ein zu ihm projectiver Ebenenbüschel *I.* Ordnung a, dessen Axe durch den Mittelpunkt des Ebenenbüschels *III.* Ordnung geht, erzeugen im Allgemeinen einen Kegel *IV.* Ordnung mit dem dreifachen Strahle a.

Der letzte Satz giebt, wie im Folgenden gezeigt wird, die projective Erzeugung desjenigen Kegels, der die $C_{2,4}$ aus einem beliebigen Punkte der Fläche $\mathfrak{F}^2$ projicirt. Eine weitere Fortführung der hier angestellten Untersuchung wird an anderer Stelle gegeben werden.

Aus einem beliebigen Punkte **P** der Fläche $\mathfrak{F}^2$ wird die Regelschaar einer Fläche F^3, welche durch die $C_{2,4}$ geht und eine Doppelsehne **d** der Curve zur Doppellinie hat, durch einen Ebenenbüschel *III.* Ordnung projicirt. Der Ebenenbüschel *III.* Ordnung **P** und der Ebenenbüschel *I.* Ordnung **d** sind perspectiv zur Regelschaar von F^3 und folglich projectiv zu einander. Der Ebenenbüschel *I.* Ordnung **d** ist ferner perspectiv zur Regelschaar R^2 der Fläche $\mathfrak{F}^2$ und also auch projectiv zum Ebenenbüschel *I.* Ordnung **p**, dessen Axe die durch den Punkt **P** gehende Doppelsehne **p** der $C_{2,4}$ ist. Da hiernach der Ebenenbüschel *III.* Ordnung **P** projectiv zum Ebenenbüschel *I.* Ordnung **p** ist, so erzeugt er mit ihm nach obigem Satze einen Kegel *IV.* Ordnung mit dem dreifachen Strahle **p**. Also:

Aus einem beliebigen Punkte P von $\mathfrak{F}^2$, der ausserhalb der $C_{2,4}$ gelegen ist, wird letztere durch einen Kegel *IV.* Ordnung mit einem dreifachen Strahle projicirt und zwar ist der dreifache Strahl die durch P gehende Doppelsehne der $C_{2,4}$.

10. Aus jeder Doppelsehne der $C_{2,4}$ wird die Regelschaar der Fläche $\mathfrak{F}^2$ durch einen zu ihr perspectiven Ebenenbüschel *I.* Ordnung projicirt. Auf jedem Strahle von R^2 liegt aber ein einziger Punkt der $C_{2,4}$, folglich ergiebt sich: Die $C_{2,4}$ wird aus ihren Doppelsehnen durch projective Ebenenbüschel *I.* Ordnung projicirt.

Mit Rücksicht auf diesen Satz wird festgesetzt:

Vier Punkte einer $C_{2,4}$ sollen vier harmonische Punkte genannt werden, wenn sie aus einer und folglich aus jeder Doppelsehne durch vier harmonische Ebenen projicirt werden.

Ohne Weiteres können nunmehr die allgemeinen Definitionen und Sätze, welche für die projective Verwandtschaft von Elementargebilden aufgestellt sind (Reye, G. d. L. II. Aufl. I. Abth. pag. 43 und 44), auf die $\mathbf{C}_{2,4}$ übertragen werden. So lautet der oben bewiesene Satz dann z. B.:

Die $C_{2,4}$ wird aus jeder Doppelsehne durch einen zu ihr perspectiven Ebenenbüschel *I.* Ordnung projicirt.

Ein beliebiger auf eine $\mathbf{C}_{2,4}$ projectiv bezogener Ebenenbüschel *I.* Ordnung **a** erzeugt mit einem zur $\mathbf{C}_{2,4}$ perspectiven Ebenenbüschel *I.* Ordnung im Allgemeinen eine Regelfläche *II.* Ordnung, welche mit der Fläche $\mathfrak{F}^2$ einen Strahl gemein hat. Beide Flächen schneiden sich also ausserdem in einer Raumcurve *III.* Ordnung. Mit der $\mathbf{C}_{2,4}$ hat letztere höchstens fünf gemeinsame Punkte **(5)**; nur diese Punkte der $\mathbf{C}_{2,4}$ liegen auf den entsprechenden Ebenen des Büschels **a**. Somit gilt:

Sind ein Ebenenbüschel *I.* Ordnung und eine $C_{2,4}$ projectiv auf einander bezogen, so gehen im Allgemeinen höchstens fünf Ebenen des Büschels durch die entsprechenden Punkte der $C_{2,4}$.

Hieraus folgt mit Leichtigkeit:

Eine $C_{2,4}$ und eine zu ihr projective Punktreihe *I.* Ordnung erzeugen im Allgemeinen eine Regelfläche *V.* Ordnung.

Aus einer beliebigen Geraden wird nämlich die Punktreihe durch einen zur $\mathbf{C}_{2,4}$ projectiven Ebenenbüschel *I.* Ordnung projicirt, von dem im Allgemeinen fünf Ebenen durch die entsprechenden Punkte der $\mathbf{C}_{2,4}$ gehen. Diese Flächen *V.* Ordnung nebst ihren Ausartungen näher zu discutiren, liegt ausserhalb des Bereiches dieser Arbeit.

11. Eine Regelfläche *III.* Ordnung $\mathbf{F}^3$ und eine Regelfläche *II.* Ordnung $\mathbf{F}^2$ durchdringen sich in einer Raumcurve *VI.* Ordnung [1]). Haben beide Flächen zwei zur selben Regelschaar $\mathbf{L}^2$ von $\mathbf{F}^2$ gehörige Strahlen **a, b** gemein, so zerfällt ihre Schnittlinie in **a, b** und eine Raumcurve *IV.* Ordnung $\mathbf{K}_{2,4}$, welche, wie leicht erkennbar, alle Strahlen der Regelschaar $\mathbf{L}^2$ der Fläche $\mathbf{F}^2$ zu Doppelsehnen und alle Regelstrahlen und die Doppellinine **d** der Fläche $\mathbf{F}^3$ zu Sehnen hat. Wir wollen beweisen, dass diese Raumcurve *IV.* Ordnung $\mathbf{K}_{2,4}$ ebenso erzeugt werden kann, wie die bisher untersuchte $\mathbf{C}_{2,4}$.

Während ein Punkt den Strahl **a** der Fläche $\mathbf{F}^3$ durchläuft, dreht sich seine Berührungsebene um **a** und beschreibt einen zu der durchlaufenen Punktreihe projectiven Ebenenbüschel *I.* Ordnung **a**, dessen Ebenen die Fläche $\mathbf{F}^3$ ausser in **a** noch in Kegelschnitten $\mathbf{k}^2$ schneiden. Letztere gehen durch den Schnittpunkt **A** des Strahles **a** mit der Doppellinie **d** und berühren in **A** diejenige Tangentialebene $\mathfrak{a}$ der Fläche $\mathbf{F}^3$, welche den zweiten durch **A** gehenden Regelstrahl $\mathbf{a}_1$ und die Doppellinie **d** derselben enthält [2]). Aus dem Schnittpunkte **B** der Doppellinie **d** mit dem Strahle **b** werden nun die

---

[1]) Reye, G. d. L. II. Aufl. II. Abth. pag. 215.

[2]) B. Klein, Ueber d. grdl. Fl. III. Ordg. pag. 22.

Kegelschnitte $\mathbf{k}^2$ durch Kegel *II.* Ordnung projicirt. Diese haben die durch **B** gehenden Regelstrahlen **b**, $\mathbf{b}_1$ der Fläche $\mathbf{F}^3$ mit einander gemein, berühren längs **d** die Ebene **α** und bilden folglich einen Büschel von Kegeln *II.* Ordnung. Zu dem erhaltenen Kegelbüschel ist die Punktreihe **a** perspectiv und folglich der Ebenenbüschel *I.* Ordnung **a** projectiv. Der Büschel **a** ist wiederum projectiv zum Büschel **b**, da beide perspectiv zur Regelschaar $\mathbf{R}^2$ der Fläche $\mathbf{F}^2$ sind, deren Strahlen die $\mathbf{K}_{2,4}$ in je einem Punkte schneiden. Sonach ist der Kegelbüschel **B** auch projectiv zum Ebenenbüschel *I.* Ordnung **b** und erzeugt mit ihm einen Kegel *III.* Ordnung mit dem Doppelstrahle **b**. Kurz die $\mathbf{K}_{2,4}$ wird aus ihren Schnittpunkten **A** und **B** mit der Doppellinie **d** der Fläche $\mathbf{F}^3$ durch je einen Kegel *III.* Ordnung mit der Doppellinie **a** resp. **b** projicirt.

Eine Doppelsehne **f** und die zu ihr windschiefe Sehne **d** der $\mathbf{K}_{2,4}$, sowie die $\mathbf{K}_{2,4}$ selbst mögen von fünf Strahlen **s** in je einem Punkte geschnitten werden. Wird nun **f** zur Doppellinie und **d** zur einfachen Leitlinie einer Regelschaar *III.* Ordnung gewählt, so giebt es (Anmerkung II im Anhang) nur eine solche Fläche, welche die fünf Strahlen **s** zu Erzeugenden hat. Diese Fläche *III.* Ordnung schneidet die Fläche $\mathbf{F}^2$ in einer durch **A** und **B** gehenden $\mathbf{C}_{2,4}$. Aus **A** werden die $\mathbf{K}_{2,4}$ und die $\mathbf{C}_{2,4}$, da sie gleiche Doppelsehnen haben, durch zwei Kegel *III.* Ordnung mit demselben Doppelstrahle **a** projicirt. Diese Kegel haben den Strahl **AB** und diejenigen fünf Strahlen gemeinsam, welche **A** mit den Schnittpunkten der Geraden **s** und der $\mathbf{K}_{2,4}$ verbinden. Zwei Kegel *III.* Ordnung mit gleichem Doppelstrahle und sechs gemeinsamen Erzeugenden sind aber indentisch, folglich sind es auch die $\mathbf{K}_{2,4}$ und die $\mathbf{C}_{2,4}$ Somit ist bewiesen:

Haben eine Fläche *II.* Ordnung und eine geradlinige Fläche *III.* Ordnung zwei windschiefe Gerade mit einander gemein, so schneiden sie sich ausserdem in einer $C_{2,4}$. Die Doppellinie und die Regelstrahlen der Fläche *III.* Ordnung sind Sehnen dieser Raumcurve.

12. Eine Doppelsehne **d** und eine zu ihr windschiefe Sehne **s** der $\mathbf{C}_{2,4}$ bestimmen zusammen mit der $\mathbf{C}_{2,4}$ eine Regelfläche *III.* Ordnung, deren Doppellinie **d** und deren einfache Leitlinie **s** ist **(6)**. Aus **d** wird die Regelschaar dieser Fläche durch einen involutorischen Ebenenbüschel *I.* Ordnung projicirt [1]), wenn je zwei Ebenen des Büschels **d** einander zugeordnet werden, die zwei mit der einfachen Leitlinie **s** in einer Ebene gelegene Regelstrahlen projiciren. Da der Ebenenbüschel **d** perspectiv zur $\mathbf{C}_{2,4}$ ist, so bedingt die involutorische Paarung seiner Ebenen die der Punkte der $\mathbf{C}_{2,4}$. Jedes Punktepaar der auf der $\mathbf{C}_{2,4}$ erhaltenen involutorischen Punktreihe liegt aber nach Obigem mit der Sehne **s** in einer Ebene, folglich gilt der Satz:

Ist die Axe eines Ebenenbüschels *I.* Ordnung eine Sehne s der $C_{2,4}$, so schneiden seine Ebenen die Curve in den Punktepaaren einer involutorischen Punktreihe.

---

1) B. Klein, Ueber d. grdl. Fl. III. Ordg. pag. 17.

13. Eine involutorische $C_{2,4}$ wird aus einem beliebigen auf ihr gelegenen Punkte **P** durch eine involutorische Kegelfläche *III.* Ordnung mit einem Doppelstrahle projicirt. Die Strahlenpaare der letzteren liegen im Allgemeinen in je einer Ebene eines Ebenenbüschels *II.* Ordnung (Anmerkung II im Anhang), folglich ergiebt sich:

Wird jedes Punktepaar einer involutorischen $C_{2,4}$ mit einem beliebigen Punkte P der Curve durch eine Ebene verbunden, so bilden diese Ebenen einen Ebenenbüschel *II.* Ordnung.

14. Diejenigen Sehnen **a** der $C_{2,4}$, welche eine Sehne **s** derselben ausserhalb der Curve treffen, schneiden die $C_{2,4}$ in den Punktepaaren einer involutorischen Punktreihe **(12)**. Aus einem beliebigen Punkte **P** der $C_{2,4}$ werden dieselben folglich durch einen Ebenenbüschel *II.* Ordnung projicirt **(13)**. Ausser der Sehne **s** schneiden die Sehnen **a** noch einen Strahl **t**, wie später bewiesen wird **(22)**. Ist nun P_1 der **P** zugeordnete Punkt der involutorischen $C_{2,4}$, so geht durch den Schnittpunkt von PP_1 und **s** eine Sehne **u**. Die sie projicirende Ebene des Büschels *II.* Ordnung enthält den Strahl **t**, letzterer wird also von den Sehnen **a** in einer zum Ebenenbüschel **P** perspectiven Punktreihe geschnitten. Diese Punktreihe ist ebenfalls perspectiv zum Ebenenbüschel *I.* Ordnung **s**, so dass die Büschel **P** und **s** projectiv auf einander bezogen sind, wenn zwei Ebenen der Büschel einander zugeordnet werden, die dieselbe **t** schneidende Sehne der $C_{2,4}$ projiciren. In anderen Worten:

Jede Sehne s der $C_{2,4}$ ist Doppellinie einer aus Sehnen der $C_{2,4}$ bestehenden Regelfläche *III.* Ordnung F^3. Schneidet die Sehne s die $C_{2,4}$ in zwei reellen Punkten, so liegen auf der Fläche F^3 die von s getroffenen Doppelsehnen.

15. In den folgenden Untersuchungen werden diejenigen Sehnen der $C_{2,4}$, welche die Curve in zwei reellen Punkten schneiden **eigentliche Sehnen**, diejenigen Sehnen, welche die Curve in zwei conjugirt imaginären Punkten schneiden, **uneigentliche Sehnen** der $C_{2,4}$ genannt.

Mit Rücksicht hierauf ergiebt sich aus **(12)** und dem vorstehenden Satze:

Diejenigen Sehnen der $C_{2,4}$, welche eine beliebige Sehne s ausserhalb der Curve schneiden, liegen auf einer Regelfläche *III.* Ordnung F^3 mit s als Doppellinie und paaren die Punkte der $C_{2,4}$ involutorisch. Sind die Ordnungspunkte der involutorischen Punktreihe reell, so trennen die Tangenten in denselben die auf der Fläche F^3 gelegenen eigentlichen und uneigentlichen Sehnen der $C_{2,4}$, sind die Ordnungspunkte conjugirt imaginär, so sind alle Regelstrahlen der Fläche F^3 eigentliche Sehnen.

16. Jede Sehne **t** der $C_{2,4}$, welche eine beliebige Sehne **s** derselben schneidet, ist Doppellinie einer durch die $C_{2,4}$ gehenden Fläche F^3, welche die Sehne **s** enthält. Alle Sehnen **t** liegen aber selbst wieder auf einer durch die $C_{2,4}$ gehenden Fläche F^3 mit der Doppellinie **s**. Kurz:

Eine Sehne s der $C_{2,4}$ ist Regelstrahl unendlich vieler durch die $C_{2,4}$ gehender Regelflächen *III.* Ordnung F^3. Die Doppellinien der letzteren sind Sehnen der Curve und liegen selbst wieder auf einer Fläche F^3 mit der Doppellinie s.

II.

Die Abbildung der $C_{2,4}$, ihres Sehnensystemes und der Schnittlinien ihrer doppelt berührenden Ebenen auf einer Ebene.

Die $\mathbf{C}_{2,4}$ kann projectiv so auf einen Kegelschnitt bezogen werden, dass jedem Punkte der ersteren Curve ein Punkt der letzteren entspricht. Jeder Sehne der Raumcurve entspricht dann ein Strahl und jeder Schnittlinie zweier doppelt berührenden Ebenen, wie später gezeigt wird, ein Punkt in der Ebene des Kegelschnittes. Diese Abbildung des Sehnensystemes der $\mathbf{C}_{2,4}$ auf das Strahlensystem und der Schnittlinien ihrer doppelt berührenden Ebenen auf das Punktsystem einer Ebene wird in den folgenden Untersuchungen zu weiteren Eigenschaften der $\mathbf{C}_{2,4}$ führen.

17. Schneidet eine Ebene $\mathfrak{e}$ die Fläche $\mathfrak{F}^2$ in einem Kegelschnitt $\mathbf{k}^2$, so ist die Regelschaar $\mathbf{R}^2$ von $\mathfrak{F}^2$, deren Strahlen die $\mathbf{C}_{2,4}$ in je einem Punkte schneiden, perspectiv zu $\mathbf{k}^2$ und zur $\mathbf{C}_{2,4}$. Also sind $\mathbf{k}^2$ und die $\mathbf{C}_{2,4}$ projectiv auf einander bezogen, wenn je zwei Punkte als entsprechende einander zugewiesen werden, die auf dem nämlichen Strahle der Regelschaar $\mathbf{R}^2$ liegen. Jeder Sehne der einen Curve entspricht eine Sehne der anderen Curve. Den Strahlen einer Kegelfläche, welche die $\mathbf{C}_{2,4}$ aus einem ihrer Punkte $\mathbf{A}$ projicirt, entsprechen die Strahlen eines Strahlenbüschels *I.* Ordnung $\mathbf{A}_1$. Den Tangenten der $\mathbf{C}_{2,4}$ entsprechen die Tangenten von $\mathbf{k}^2$.

18. Diejenigen Sehnen der $\mathbf{C}_{2,4}$, welche eine beliebige Sehne $\mathbf{r}$ ausserhalb der Curve schneiden, liegen auf einer $\mathbf{F}^3$ mit $\mathbf{r}$ als Doppellinie und paaren die Punkte

der $C_{2,4}$ involutorisch **(15)**. Die involutorische Paarung der Punkte der $C_{2,4}$ zieht die der Punkte von k^2 nach sich, somit entsprechen den Strahlen der Regelschaar R^3 von F^3 die Strahlen eines Strahlenbüschels *I.* Ordnung R_1 von c. Der Doppellinie r von F^3 entspricht eine Gerade r_1.

Durch eine beliebige Sehne s gehen unendlich viele die $C_{2,4}$ enthaltende Regelflächen *III.* Ordnung, deren Doppellinien Sehnen der Curve sind. Die Doppellinien dieser Flächen sind selbst wieder Strahlen einer Regelschaar *III.* Ordnung S^3 mit s als Doppellinie **(16)**. Wenn demnach in c ein Punkt R_1 den Strahl s_1 durchläuft, so dreht sich r_1 um S_1; R_1 und r_1 sind folglich homologe Elemente von zwei reciproken ebenen Systemen. Diese Systeme liegen aber involutorisch und bilden ein ebenes Polarsystem, weil jedem Strahle s_1 ein Punkt S_1 in doppelter Weise entspricht. Also:

Einer die $C_{2,4}$ enthaltenden Regelfläche *III.* Ordnung mit einer Sehne als Doppellinie entspricht ein Strahlenbüschel *I.* Ordnung und eine Punktreihe *I.* Ordnung, deren Träger in einem ebenen Polarsysteme einander zugeordnet sind. Die Ordnungscurve dieses Polarsystemes wird durch c^2 bezeichnet.

Jeder Punkt von c^2 liegt auf seiner Polare. Den durch einen Punkt von c^2 laufenden Strahlen entspricht folglich eine Regelfläche *III.* Ordnung, deren Doppellinie zugleich Regelstrahl ist, d. h. eine Regelfläche *III.* Ordnung mit einer einzigen Leitlinie. Kurz:

Unter den die $C_{2,4}$ enthaltenden Regelflächen *III.* Ordnung, deren Doppellinien Sehnen der $C_{2,4}$ sind, giebt es im Allgemeinen unendlich viele mit einer einzigen Leitlinie.

Einer durch die $C_{2,4}$ gehenden Regelfläche *III.* Ordnung mit einer einzigen Leitlinie entspricht ein Strahlenbüschel *I.* Ordnung, dessen Mittelpunkt auf c^2 gelegen ist.

19. Schneiden sich zwei Sehnen der $C_{2,4}$ ausserhalb der Curve, so ist jede von ihnen Doppellinie einer Regelfläche *III.* Ordnung, welche durch die $C_{2,4}$ und die andere Sehne geht. Nach **(18)** folgt hieraus mit Leichtigkeit:

Zwei sich ausserhalb der $C_{2,4}$ schneidende Sehnen werden durch zwei in Bezug auf c^2 conjugirte Gerade abgebildet, die drei sich ausserhalb der $C_{2,4}$ in einem Punkte schneidenden Sehnen durch die Seiten eines Poldreiecks von c^2. Den Seiten eines vollständigen Sehnenvierecks der $C_{2,4}$ entsprechen die Seiten eines k^2 eingeschriebenen Polvierecks von c^2, nämlich eines Vierecks, dessen Seiten conjugirt sind in Bezug auf c^2.

20. Eine Doppelsehne l der $C_{2,4}$ sei ein Regelstrahl der aus Sehnen der $C_{2,4}$ bestehenden Fläche *III.* Ordnung F^3, sie schneide also die Doppellinie f der letzteren in einem Curvenpunkte A. Die Regelstrahlen von F^3 treffen nun die $C_{2,4}$ in den Punktepaaren einer involutorischen Punktreihe **(15)** und es ist leicht ersichtlich, dass die beiden anderen Schnittpunkte B, C der Doppelsehne l mit der $C_{2,4}$ ein Punktepaar derselben bilden. Als Bild von l ergiebt sich sonach ein k^2 eingeschriebenes Dreieck

$A_1 B_1 C_1$, dessen Seite $B_1 C_1$ den Pol F_1 von f_1 in Bezug auf $\mathfrak{c}^2$ enthält **(18)**. Dreht sich f_1 um A_1, indem f eine die $C_{2,4}$ projicirende Kegelfläche um A beschreibt, so bewegt sich der Pol F_1 auf der Geraden $B_1 C_1$ und letztere ist folglich die Polare des Punkte A_1 in Bezug auf $\mathfrak{c}^2$. Ebenso sind $C_1 A_1$ und $A_1 B_1$ die Polaren von B_1 resp. C_1 in Bezug auf $\mathfrak{c}^2$. Kurz $A_1 B_1 C_1$ erweist sich als ein k^2 eingeschriebenes Poldreieck von $\mathfrak{c}^2$. Also:

Einer Doppelsehne der $C_{2,4}$ entspricht ein k^2 eingeschriebenes Poldreieck von $\mathfrak{c}_2$. Die Seiten dieser Poldreiecke bilden einen Strahlenbüschel *II.* Ordnung, welcher die Fläche $\mathfrak{F}^2$ representirt.

Die Polare a_1 eines Punktes A_1 von k^2 in Bezug auf $\mathfrak{c}^2$ schneidet k^2 in zwei Punkten B_1, C_1, welche mit A_1 die Eckpunkte eines Poldreiecks von $\mathfrak{c}^2$ bilden [1]). Ist im Besonderen a_1 eine Tangente von k^2, so fallen die Seiten $A_1 B_1$ und $A_1 C_1$ des Poldreiecks $A_1 B_1 C_1$ von $\mathfrak{c}^2$ mit einer Tangente von $\mathfrak{c}^2$ zusammen, und der Berührungspunkt von a_1 ergiebt sich als ein Schnittpunkt von $\mathfrak{c}^2$ und k^2. Mit einem Worte:

Die beiden Tangenten eines Schnittpunktes von k^2 und $\mathfrak{c}^2$ bilden eine die $C_{2,4}$ berührende Doppelsehne ab. Zu den Doppelsehnen der $C_{2,4}$ gehören im Allgemeinen vier ihrer Tangenten.

21. Die Bildebene $\mathfrak{e}$ enthalte die eigentliche Sehne f der $C_{2,4}$. Wird dann f zur Doppellinie einer die $C_{2,4}$ enthaltenden Regelfläche *III.* Ordnung F^3 gewählt, so sind auf letzterer die beiden von f getroffenen Doppelsehnen a, b der Curve gelegen **(14)**. Durch einen an a und b hingleitenden Strahl wird nun die Fläche F^3 eindeutig auf der Ebene $\mathfrak{e}$ abgebildet. Hierbei entspricht k^2 der $C_{2,4}$ in der in **(17)** festgesetzten Weise, während alle durch einen Ebenenbüschel *I.* Ordnung g auf der Fläche F^3 bestimmten Curven *III.* Ordnung im Allgemeinen einen Kegelschnittbüschel zum Bilde haben [2]). Jeder Kegelschnitt dieses Büschels schneidet die Bildcurve k^2 der $C_{2,4}$ in den Eckpunkten je eines Polvierecks von $\mathfrak{c}^2$ **(19)**. Die Seiten dieser Polvierecke sind Tangenten einer Curve *III.* Classe, die identisch mit derjenigen ist, die von sämmtlichen Linienpaaren des durch k^2 und den Kegelschnittbüschel bestimmten Netzes berührt wird [3]). Also:

Allen eine beliebige Gerade g schneidenden Sehnen der $C_{2,4}$ entsprechen die Tangenten einer Curve *III.* Classe.

Zwei Curven *III.* Classe haben höchstens neun gemeinschaftliche Tangenten, folglich ergiebt sich:

Alle eine beliebige Gerade g schneidenden Sehnen der $C_{2,4}$ liegen auf einer Fläche *IX.* Ordnung, welche dreimal durch g und die $C_{2,4}$ geht.

1) Reye, G. d. L. II. Aufl. I. Abth. pag. 194.
2) B. Klein, Ueber d. grdl. Fl. III. Ordg. pag. 31.
3) Steiner-Schröter, Die Theorie der Kegelschnitte II. Aufl. pag. 521.

Analog folgt u. A., weil $\mathbf{k}^2$ mit einer Curve *III.* Classe höchstens sechs Tangenten gemein hat:

Die Tangenten der $C_{2,4}$ liegen auf einer Fläche *VI.* Ordnung.

22. In **(14)** wurde der Satz benutzt:

Diejenigen Sehnen der $C_{2,4}$, welche eine beliebige Sehne ausserhalb der Curve schneiden, schneiden noch eine zweite Gerade t.

Aus der vorstehenden Untersuchung ergiebt sich der Beweis dieses Satzes wie folgt:

Denjenigen Sehnen der $\mathbf{C}_{2,4}$, welche eine Sehne **s** derselben ausserhalb der Curve schneiden, entspreche der Strahlenbüschel *I.* Ordnung $\mathbf{S}_1$. Ausser **s** schneidet noch eine zweite Gerade **t** irgend vier dieser Sehnen. Vier Strahlen des Strahlenbüschels *I.* Ordnung $\mathbf{S}_1$ berühren also diejenige Curve *III.* Classe, welche von den Bildern der **t** schneidenden Sehnen umhüllt wird. Der Strahlenbüschel *I.* Ordnung $\mathbf{S}_1$ muss folglich selbst einen Theil jener Curve *III.* Classe bilden.

23. Ist **g** einfache Leitlinie einer aus Sehnen der $\mathbf{C}_{2,4}$ bestehenden Regelschaar $\mathbf{R}^3$, so entspricht jedem mit **g** in einer Ebene gelegenen vollständigen Sehnenvierecke der $\mathbf{C}_{2,4}$ ein $\mathbf{k}^2$ eingeschriebenes Polviereck von $\mathfrak{c}^2$, von welchem ein Paar Gegenseiten durch den Punkt $\mathbf{R}_1$ gehen **(18)**. Umgekehrt schneiden zwei in Bezug auf $\mathfrak{c}^2$ conjugirte Strahlen des Büschels $\mathbf{R}_1$ den Kegelschnitt $\mathbf{k}^2$ in den Eckpunkten eines Polvierecks von $\mathfrak{c}^2$, welches ein vollständiges mit **g** in einer Ebene gelegenes Sehnenviereck der $\mathbf{C}_{2,4}$ abbildet. Je zwei Punkte einer Curve *II.* Ordnung, durch welche zwei zugeordnete Strahlen eines involutorischen Büschels *I.* Ordnung gehen, liegen nun im Allgemeinen auf einem Strahle eines Büschels *II.* Ordnung [1]). Hiernach werden in diesem Falle alle die Gerade **g** schneidenden Sehnen der $\mathbf{C}_{2,4}$ durch einen aus einem Büschel *I.* und *II.* Ordnung bestehenden Strahlenbüschel *III.* Ordnung abgebildet. Mit Rücksicht darauf, dass den eine beliebige Gerade schneidenden Sehnen der $\mathbf{C}_{2,4}$ die Tangenten einer Curve *III.* Classe entsprechen, folgt aus dem Vorstehenden:

Die einfache Leitlinie einer aus Sehnen der $C_{2,4}$ bestehenden Regelfläche *III.* Ordnung ist zusammen mit der $C_{2,4}$ Doppellinie einer geradlinigen Fläche *VI.* Ordnung.

24. In einer Schmiegungsebene der $\mathbf{C}_{2,4}$ fallen die Eckpunkte des in ihr gelegenen vollständigen Sehnenvierecks mit dem Schmiegungspunkte zusammen. Das entsprechende Polviereck besteht folglich aus einer Tangente $\mathbf{t}_1$ von $\mathbf{k}^2$ und der Verbindungslinie ihres Poles $\mathbf{T}_1$ in Bezug auf $\mathfrak{c}^2$ mit ihrem Berührungspunkte. Während sich die Tangente $\mathbf{t}_1$ auf $\mathbf{k}^2$ abwälzt, beschreibt ihr Pol $\mathbf{T}_1$ einen zu $\mathbf{k}^2$ projectiven Kegelschnitt. Mithin werden die in den Schmiegungsebenen enthaltenen Sehnen der

---

[1]) Reye, G. d. L. II. Aufl. I. Abth. pag. 183.

$\mathbf{C_{2,4}}$ durch einen Strahlenbüschel *IV.* Ordnung mit drei Doppelstrahlen abgebildet. Den eine beliebige Gerade schneidenden Sehnen der $\mathbf{C_{2,4}}$ entsprechen die Tangenten einer Curve *III.* Classe. Diese hat, wie analytisch bewiesen ist, mit einer Curve *IV.* Classe zwölf gemeinsame Tangenten. Also:

Die in den Schmiegungsebenen enthaltenen Sehnen der $C_{2,4}$ liegen auf einer dreimal (4) durch die $C_{2,4}$ gehenden Fläche *XII.* Ordnung. Ihre Bilder umhüllen eine Curve *IV.* Classe mit drei Doppeltangenten und zwar entsprechen den letzteren drei Sehnen der $C_{2,4}$, in denen sich zwei Schmiegungsebenen schneiden.

Der Pol $\mathbf{T_1}$ einer gemeinsamen Tangente $\mathbf{t_1}$ von $\mathbf{k^2}$ und $\mathbf{c^2}$ bezüglich $\mathbf{c^2}$ ist ihr Berührungspunkt mit $\mathbf{c^2}$, folglich verbindet die Tangente $\mathbf{t_1}$ selbst ihren Pol $\mathbf{T_1}$ mit ihrem auf $\mathbf{k^2}$ gelegenen Berührungspunkte. Nach der vorstehenden Auseinandersetzung ergeben sich sonach die gemeinsamen Tangenten von $\mathbf{k^2}$ und $\mathbf{c^2}$ als Bilder der stationären Schmiegungsebenen der $\mathbf{C_{2,4}}$. Hieraus folgt:

Die $C_{2,4}$ hat im Allgemeinen vier stationäre Schmiegungsebenen. Als Bilder derselben sind die gemeinsamen Tangenten von k^2 und c^2 anzusehen.

25. Enthält eine Ebene die einfache Leitlinie einer aus Sehnen der $\mathbf{C_{2,4}}$ bestehenden Fläche *III.* Ordnung $\mathbf{F^3}$, so gehört ein Paar Gegenseiten **a, b** des in ihr gelegenen vollständigen Sehnenvierecks der $\mathbf{C_{2,4}}$ zur Regelschaar von $\mathbf{F^3}$. In einer Cuspidalebene der Fläche $\mathbf{F^3}$ fallen nun die Regelstrahlen **a, b** zu einer singulären Erzeugenden zusammen. Das in ihr gelegene vollständige Sehnenviereck der $\mathbf{C_{2,4}}$ ist also ein uneigentliches und besteht aus jener singulären Erzeugenden und den beiden Tangenten in ihren Schnittpunkten mit dieser Raumcurve. Kurz:

Die Cuspidalebenen einer aus Sehnen der $C_{2,4}$ bestehenden Regelfläche *III.* Ordnung F^3 sind doppelt berührende Ebenen der Curve. Die Berührungssehnen der letzteren sind die singulären Erzeugenden der Fläche.

Je zwei doppelt berührende Ebenen der $C_{2,4}$ sind umgekehrt die Cuspidalebenen einer aus Sehnen der $C_{2,4}$ bestehenden Fläche *III.* Ordnung F^3.

Ihre Berührungssehnen verbinden nämlich zwei Punktepaare derjenigen involutorischen Punktreihe, welche von den Regelstrahlen der gesuchten Fläche $\mathbf{F^3}$ auf der $\mathbf{C_{2,4}}$ bestimmt wird.

Aus den beiden letzten Sätzen folgt ohne Weiteres:

Die einfachen Leitlinien aller aus Sehnen der $C_{2,4}$ bestehenden Regelflächen *III.* Ordnung F^3 sind die Axen des Büschels der doppelt berührenden Ebenen der $C_{2,4}$, d. h. die Schnittlinien von je zwei dieser Ebenen.

26. Die Berührungssehne einer doppelt berührenden Ebene der $\mathbf{C_{2,4}}$ ist als ein Paar unendlich nahe bei einander liegender sich schneidender Sehnen der $\mathbf{C_{2,4}}$ aufzufassen. Ihr entspricht folglich ein in Bezug auf $\mathbf{c^2}$ sich selbst conjugirter Strahl **(19)** d. h. eine Tangente von $\mathbf{c^2}$. Also:

Den Berührungssehnen der doppelt berührenden Ebenen der $C_{2,4}$ entsprechen die Tangenten von $\mathfrak{c}^2$.

Mit einer Curve *III.* Classe hat $\mathfrak{c}^2$ im Allgemeinen sechs Tangenten gemein, ferner gehen durch einen Punkt von $\mathfrak{k}^2$ im Allgemeinen zwei Tangenten von $\mathfrak{c}^2$. Hieraus folgt:

Die Berührungssehnen der doppelt berührenden Ebenen der $C_{2,4}$ liegen auf einer zweimal durch die $C_{2,4}$ gehenden Fläche *VI.* Ordnung.

27. Diejenigen Sehnen der $C_{2,4}$, welche die einfache Leitlinie einer aus Sehnen der $C_{2,4}$ bestehenden Regelschaar *III.* Ordnung R^3 schneiden, werden durch die Strahlen eines involutorischen Büschels *I.* Ordnung R_1 und eines Büschels *II.* Ordnung abgebildet **(23)**. Letzterer ist bestimmt durch $\mathfrak{k}^2$ und den involutorischen Büschel R_1, dieser wiederum ist bekannt, sobald sein Mittelpunkt und $\mathfrak{c}^2$ gegeben sind. Der Mittelpunkt des Büschels R_1 wird daher im Folgenden als Bild der einfachen Leitlinie der Regelschaar R^3 bezeichnet. Da die einfachen Leitlinien aller aus Sehnen der $C_{2,4}$ bestehenden Flächen *III.* Ordnung identisch sind mit den Axen des Büschels der doppelt berührenden Ebenen der $C_{2,4}$ **(25)**, so ist eine eindeutige Abbildung dieser Axen gewonnen, welche über ihre Vertheilung im Raume manches Neue liefern wird.

28. Zwei Sehnen der $C_{2,4}$ bestimmen im Allgemeinen mit der $C_{2,4}$ eine Regelfläche *III.* Ordnung und zwar liegen sie, wenn sie sich schneiden, mit der einfachen Leitlinie der letzteren in einer Ebene. Jedes Paar Gegenseiten des vollständigen Sehnenvierecks $\mathfrak{f}$ der $C_{2,4}$ wird hiernach mit der Curve durch eine Regelfläche *III.* Ordnung verbunden, deren einfache Leitlinie in der Ebene von $\mathfrak{f}$ gelegen ist. Dem vollständigen Sehnenvierecke $\mathfrak{f}$ entspricht ein $\mathfrak{k}^2$ eingeschriebenes Polviereck $\mathfrak{f}_1$ von $\mathfrak{c}^2$. Jeder Regelfläche *III.* Ordnung, welche ein Paar Gegenseiten von $\mathfrak{f}$ mit der $C_{2,4}$ verbindet, entspricht ein Strahlenbüschel *I.* Ordnung, dessen Mittelpunkt Schnittpunkt zweier Gegenseiten von $\mathfrak{f}_1$ ist. Die Schnittpunkte der drei Paar Gegenseiten von $\mathfrak{f}_1$ bilden aber ein Poldreieck von $\mathfrak{k}^2$, folglich gilt der Satz:

In einer Ebene liegen im Allgemeinen drei Schnittlinien doppelt berührender Ebenen und ein vollständiges Sehnenviereck $\mathfrak{f}$ der $C_{2,4}$. Entspricht das $\mathfrak{k}^2$ eingeschriebene Polviereck $\mathfrak{f}_1$ von $\mathfrak{c}^2$ dem vollständigen Sehnenvierecke $\mathfrak{f}$, so entsprechen die Schnittpunkte der drei Paar Gegenseiten des Polvierecks $\mathfrak{f}_1$ jenen drei Schnittlinien doppelt berührender Ebenen.

Den im Allgemeinen in einer Ebene gelegenen drei Schnittlinien doppelt berührender Ebenen der $C_{2,4}$, entsprechen die Eckpunkte eines Poldreiecks von $\mathfrak{k}^2$.

29. Den Schnittlinien einer doppelt berührenden Ebene $\mathfrak{a}$ der $C_{2,4}$ mit den übrigen doppelt berührenden Ebenen der Curve entsprechen die Punkte einer Tangente von $\mathfrak{c}^2$. Diese Tangente wird als Bild der doppelt berührenden Ebene $\mathfrak{a}$ aufgefasst.

Jede der Schnittlinien nämlich ist einfache Leitlinie je einer durch die $C_{2,4}$ gehenden Regelfläche *III.* Ordnung F^3, zu deren singulären Erzeugenden die Berührungssehne a jener Ebene α gehört. Die Mittelpunkte aller Strahlenbüschel *I.* Ordnung F_1, welche den Regelschaaren der Flächen F^3 entsprechen, müssen also auf dem Bilde a_1 der Berührungssehne a der Ebene α gelegen sein. Der Strahl a_1 ist aber eine Tangente von c^2 **(26)**.

30. Allen vollständigen Sehnenvierecken f, die in den Ebenen eines beliebigen Ebenenbüschels *I.* Ordnung g liegen, entsprechen Polvierecke f_1 von c^2, welche dem Kegelschnitte k^2 und zugleich anderen Kegelschnitten eines Kegelschnittnetzes G eingeschrieben sind **(21)**. Da nun die Schnittpunkte der drei Paar Gegenseiten eines Polvierecks f_1 ein Punkttripel der Tripelcurve des Netzes G und die Eckpunkte eines Poldreiecks von k^2 bilden, so folgt mit Rücksicht auf **(28)**:

Denjenigen Schnittlinien doppelt berührender Ebenen der $C_{2,4}$, welche eine beliebige Gerade g schneiden, entsprechen im Allgemeinen die Punkte einer Curve *III.* Ordnung. Diese Curve ist Tripelcurve eines Kegelschnittnetzes, dessen Linienpaare die g schneidenden Sehnen der $C_{2,4}$ abbilden.

Zwei beliebige Gerade werden im Allgemeinen von neun Schnittlinien doppelt berührender Ebenen der $C_{2,4}$ getroffen.

Schneiden sich die beiden Geraden, so liegen drei jener Schnittlinien in ihrer Ebene **(28)**, und die sechs übrigen gehen durch ihren Schnitttpunkt:

Durch einen beliebigen Punkt gehen somit im Allgemeinen sechs Schnittlinien doppelt berührender Ebenen der $C_{2,4}$.

Wie leicht zu erkennen, sagt dieser Satz nichts Anderes als:

Durch einen beliebigen Punkt gehen im Allgemeinen vier ein vollständiges Vierseit bildende doppelt berührende Ebenen der $C_{2,4}$.

31. Die sechs durch einen Punkt gehenden Schnittlinien doppelt berührender Ebenen der $C_{2,4}$ liegen zu dreien in vier dieser Ebenen. Ihre Bilder liegen aber zu dreien in vier Tangenten von c^2 **(29)** und bilden die Eckpunkte eines c^2 umschriebenen vollständigen Vierseits. Je zwei in einer beliebigen Ebene gelegene Schnittlinien doppelt berührender Ebenen der $C_{2,4}$ werden nun durch zwei in Bezug auf k^2 conjugirte Punkte abgebildet **(28)**. Die drei Paar Gegenecken jenes c^2 umschriebenen vollständigen Vierseits sind also drei Paar conjugirte Punkte in Bezug auf k^2. Kurz:

Je sechs durch einen Punkt gehenden Schnittlinien doppelt berührender Ebenen der $C_{2,4}$ entsprechen die Eckpunkte eines c^2 umschriebenen Polvierseits von k^2.

32. In den Eckpunkten eines gegebenen Poldreiecks $A_1 B_1 C_1$ von k^2 schneiden sich die drei Paar Gegenseiten unendlich vieler k^2 eingeschriebener voll-

ständiger Vierecke $\mathfrak{f}_1$. Ist $\mathbf{A_1 B_1 C_1}$ eines der unendlich vielen Poldreiecke von $\mathbf{k^2}$, welche $\mathfrak{c}^2$ im Allgemeinen umschrieben werden können [1]), so ist jede Seite jener Vierecke $\mathfrak{f}_1$ ihrer Gegenseite in Bezug auf $\mathfrak{c}^2$ conjugirt. Die vollständigen Vierecke $\mathfrak{f}_1$ sind in diesem Falle Polvierecke von $\mathfrak{c}^2$. Hieraus folgt mit Rücksicht auf **(23)**:

Sind die Mittelpunkte dreier Strahlenbüschel *I.* Ordnung Eckpunkte eines $\mathfrak{c}^2$ umschriebenen Poldreiecks von k^2, so entsprechen jenen Büscheln drei aus Sehnen der $C_{2,4}$ bestehende Flächen *III.* Ordnung mit derselben einfachen Leitlinie.

Wird unter einer **Doppelaxe** des Büschels doppelt berührender Ebenen der $\mathbf{C_{2,4}}$ eine Axe verstanden, in welcher sich drei Ebenen des Büschels schneiden, so sagt vorstehender Satz nichts Anderes als:

Einer Doppelaxe des Büschels doppelt berührender Ebenen der $C_{2,4}$ entsprechen die Eckpunkte eines $\mathfrak{c}^2$ umschriebenen Poldreiecks von k^2 und umgekehrt. Die Eckpunkte dieser Poldreiecke liegen auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{d}^2$, welcher den Ort der Doppelaxen representirt.

Diejenigen Schnittlinien doppelt berührender Ebenen der $\mathbf{C_{2,4}}$, welche eine beliebige Gerade $\mathfrak{g}$ schneiden, werden durch die Punkte einer Curve *III.* Ordnung abgebildet **(30)**. Schneidet die Gerade $\mathfrak{g}$ drei Doppelaxen, so hat jene Curve *III.* Ordnung mit dem Kegelschnitte $\mathfrak{d}^2$ neun Punkte gemein und zerfällt also in diesen und eine Punktreihe *I.* Ordnung. Letztere ist eine Tangente von $\mathfrak{c}^2$. Jede drei Doppelaxen schneidende Gerade schneidet hiernach alle oder:

Die Doppelaxen des Büschels doppelt berührender Ebenen der $C_{2,4}$ bilden eine Regelschaar *II.* Ordnung. Durch jeden Strahl der zugehörigen Leitschaar geht je eine doppelt berührende Ebene.

Die in den letzten Untersuchungen bewiesenen Sätze zeigen eine **vollständige Dualität zwischen der Abbildung des Sehnensystemes der $C_{2,4}$ und des Axensystemes des Büschels ihrer doppelt berührenden Ebenen,** welche sich noch weiter verfolgen liesse. Eine grosse Anzahl neuer Sätze ergiebt sich aus dieser Abbildung, sobald die projectiven Eigenschaften des Büschels doppelt berührender Ebenen der $\mathbf{C_{2,4}}$ bewiesen sind.

33. $\mathbf{k^2}$ ist unendlich vielen Polvierecken von $\mathfrak{c}^2$ umschrieben. Ist $\mathfrak{c}^2$ reell, so schliessen desshalb $\mathbf{k^2}$ und $\mathfrak{c}^2$ entweder einander aus oder $\mathbf{k^2}$ liegt theils ausserhalb, theils innerhalb $\mathfrak{c}^2$ [2]). Im ersteren Falle ist $\mathbf{k^2}$ keinem reellen Poldreiecke von $\mathfrak{c}^2$ umschrieben, durch jeden Punkt von $\mathbf{k^2}$ gehen aber zwei reelle Tangenten von $\mathfrak{c}^2$. Im letzteren Falle ist jeder innerhalb $\mathfrak{c}^2$ gelegene Punkt von $\mathbf{k^2}$ Eckpunkt eines $\mathbf{k^2}$ eingeschriebenen reellen Poldreiecks von $\mathfrak{c}^2$ und jeder ausserhalb $\mathfrak{c}^2$ gelegene Punkt von $\mathbf{k^2}$ Schnittpunkt zweier reellen Tangenten von $\mathfrak{c}^2$. Alle Punkte von $\mathbf{k^2}$ sind endlich Eckpunkte je eines $\mathbf{k^2}$ eingeschriebenen reellen Poldreiecks von $\mathfrak{c}^2$, wenn $\mathfrak{c}^2$ selbst imaginär ist. Mit Rücksicht auf die Entwicklungen in **(20)**, **(24)** und **(26)** ergiebt sich also:

---

[1]) Reye, G. d. L. II. Aufl. I. Abth. pag. 194.

[2]) Reye, G. d. L. II. Aufl. I. Abth. pag. 194.

Eine reelle $C_{2,4}$ mit lauter uneigentlichen Doppelsehnen und mit imaginären doppelt berührenden Ebenen giebt es nicht.

Gehen durch jeden Punkt einer $C_{2,4}$ zwei reelle doppelt berührende Ebenen, so sind alle Doppelsehnen der $C_{2,4}$ uneigentliche. Die vier stationären Schmiegungsebenen sind in diesem Falle reell, hingegen wird die Curve von keiner reellen Doppelsehne berührt.

Hat die $C_{2,4}$ eigentliche und uneigentliche Doppelsehnen, so hat sie Punkte, durch die zwei reelle und Punkte, durch die zwei imaginäre doppelt berührende Ebenen hindurchgehen. Je nachdem k^2 und c^2 zwei oder vier reelle Punkte gemein haben, sind zwei oder keine reellen stationären Schmiegungsebenen und zwei oder vier die $C_{2,4}$ berührende Doppelsehnen vorhanden.

Sind alle reellen Doppelsehnen einer $C_{2,4}$ eigentliche Doppelsehnen, so sind alle ihre doppelt berührenden Ebenen imaginär. Die $C_{2,4}$ besitzt dann weder reelle stationäre Schmiegungsebenen noch reelle sie berührende Doppelsehnen..

Nach dem befolgten Eintheilungsprincipe sind also, abgesehen von Uebergangsarten, **drei Hauptarten der $C_{2,4}$** zu unterscheiden.

Anhang.

I. Zwei Curven *III.* Ordnung erzeugt durch je einen Strahlenbüschel *I.* Ordnung und je einen zu ihm projectiven Strahlenbüschel *II.* Ordnung haben höchstens neun gemeinsame Punkte.

Ist nämlich eine Curve *III.* Ordnung das Erzeugniss eines Strahlenbüschels *I.* Ordnung $\mathbf{P}$ und eines zu ihm projectiven Strahlenbüschels *II.* Ordnung $\mathfrak{P}$, so sind ein zu $\mathbf{P}$ perspectiver Ebenenbüschel *I.* Ordnung und ein zu $\mathfrak{P}$ perspectiver Ebenenbüschel *II.* Ordnung zu einander projectiv und erzeugen im Allgemeinen eine Regelfläche *III.* Ordnung $\mathbf{F}^3$, welche die Curve *III.* Ordnung enthält. Alle zur Regelschaar von $\mathbf{F}^3$ perspectiven Ebenenbüschel *II.* Ordnung sind zu einander projectiv und irgend drei von ihnen bestimmen die collineare Verwandtschaft dreier Bündel, deren Erzeugniss ebenfalls die Fläche $\mathbf{F}^3$ ist. Die gegebene Curve *III.* Ordnung als Schnitt der Fläche $\mathbf{F}^3$ kann folglich durch drei collineare ebene Systeme erzeugt werden und für zwei so erzeugte Curven *III.* Ordnung ist bewiesen (Reye, G. d. L. II. Aufl. II. Abth. pag. 212), dass sie sich in höchstens neun Punkten schneiden.

Mit einem Kegelschnitte hat eine durch drei collineare ebene Systeme erzeugte Curve *III.* Ordnung höchstens sechs Punkte gemein.

II. Eine Regelfläche *III.* Ordnung ist bestimmt durch ihre Doppellinie, ihre einfache Leitlinie und fünf Regelstrahlen.

Die Doppellinie und vier Regelstrahlen treffen nämlich eine den fünften Regelstrahl enthaltende Ebene in fünf Punkten, welche einen auf der Regelfläche

enthaltenen Kegelschnitt bestimmen. Dieser Kegelschnitt, die Doppellinie und einfache Leitlinie bestimmen eindeutig eine die sieben gegebenen Strahlen in vorgeschriebener Weise enthaltende Regelfläche *III.* Ordnung (Reye, G. d. L. II. Aufl. I. Abth. pag. 181).

Im Allgemeinen geht durch einen Punkt nur ein Strahl, welcher zwei windschiefe Gerade schneidet, somit kann der obige Satz auch folgendermassen ausgesprochen werden:

Eine Regelfläche *III.* Ordnung ist im Allgemeinen aus fünf ihrer Punkte, ihrer Doppellinie und ihrer einfachen Leitlinie eindeutig construirbar.

III. Die Strahlenpaare eines involutorischen Kegels *III.* Ordnung mit einem Doppelstrahle liegen im Allgemeinen auf den Ebenen eines Ebenenbüschels *II.* Ordnung.

Der Doppelstrahl **d** des Kegels *III.* Ordnung werde zu einem Leitstrahle, ein einfacher Strahl **e** desselben zu einem Regelstrahle einer Regelschaar *II.* Ordnung $\mathbf{R}^2$ gewählt. Letztere ist perspectiv zum Ebenenbüschel *I.* Ordnung **d** und folglich projectiv zu einem Ebenenbüschel *II.* Ordnung $\mathfrak{D}$, welcher wie Büschel **d** perspectiv zum Kegel *III.* Ordnung ist. Der Strahl **e** der Regelschaar $\mathbf{R}^2$ liegt in der homologen Ebene **c** des Ebenenbüschels *II.* Ordnung $\mathfrak{D}$. In **c** liegt ausser **e** noch ein Leitstrahl **l** der Schaar. Aus diesem wird die Schaar $\mathbf{R}^2$ durch einen zum Ebenenbüschel *II.* Ordnung $\mathfrak{D}$ projectiven Ebenenbüschel *I.* Ordnung projicirt. Beide projectiven Ebenenbüschel haben die Ebene **c** entsprechend gemein und erzeugen folglich eine zu ihnen perspective Regelschaar *II.* Ordnung (v. Staudt, B. z. G. d. L. pag. 11). Ausser in den Strahlen **d** und **e** schneiden sich also der Kegel *III.* Ordnung und die Regelschaar $\mathbf{R}^2$ in einer Raumcurve, welche sich als partieller Schnitt zweier Flächen *II.* Ordnung mit einer gemeinsamen Erzeugenden erweist, d. h. in einer Raumcurve *III.* Ordnung. **d** ist eine Sehne derselben.

Die auf dem Kegel *III.* Ordnung gelegene Raumcurve *III.* Ordnung ist zu demselben perspectiv. Die involutorische Paarung der Kegelstrahlen zieht also die involutorische Paarung der Punkte der Raumcurve nach sich. Zwei zugeordnete Punkte einer involutorischen Raumcurve *III.* Ordnung liegen aber auf je einem Strahle einer Regelschaar *II.* Ordnung. Diese wird im Allgemeinen aus dem Mittelpunkte des Kegels durch einen Ebenenbüschel *II.* Ordnung projicirt.

Lebenslauf.

Ich, **Stanislaus Jolles**, bin am 25. Juli 1857 zu Berlin geboren. Den ersten Schulunterricht genoss ich in der Hölbe'schen Privatschule zu Dresden, später besuchte ich daselbst eine Realschule *I.* Ordnung. 1875 verliess ich dieselbe nach bestandenem Maturitätsexamen und bezog das dortige Polytechnikum. Vom Herbste 1878 an studirte ich drei Semester in Breslau und darauf vier Semester in Strassburg Mathematik.

In **Breslau** besuchte ich die Vorlesungen der Herren Professoren **Rosanes** und **Schröter**, in **Strassburg** die der Herren Professoren **Christoffel** und **Reye.**

Den genannten Herren, namentlich Herrn Professor Reye, sage ich für alle fördernde Anregung und Anleitung aufrichtigen Dank.